

2/3/17

Την προηγούμενη φορά είπαμε:

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Επιπεδομετρία $\mathbb{R}^2$

Στερεομετρία $\mathbb{R}^3$

Αξιοματική Θεμελίωση

- Αρχικές έννοιες (σημεία, ευθείες, επίπεδα)

- Αξιώματα
 - Αξιώματα σχετικών θέσεων
 - Αξιώματα διάταξης
 - Αξιώματα ισότητας
 - Αξίωμα παραλληλότητας
 - Αξιώματα πληρότητας-συνέχειας

(Ένα από τα αξιώματα λέει: Αν τα σημεία A, B, C είναι τέτοια ώστε το B να είναι μεταξύ των A, C τότε A, B, C είναι διακεκριμένα συνευθειακά και το B είναι μεταξύ C και A .

$A \quad B \quad C$

Είναι η γεωμετρία συμβαστική?

α) Ο ελάχιστος αριθμός αξιωμάτων δηλαδή τα αξιώματα να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

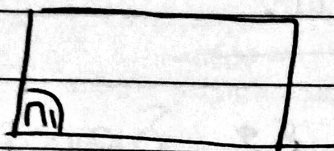
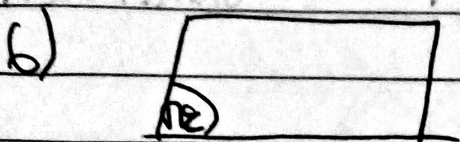
β) Απαρτιωμένο από αντιφάσεις.

γ) Πληρότητα

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

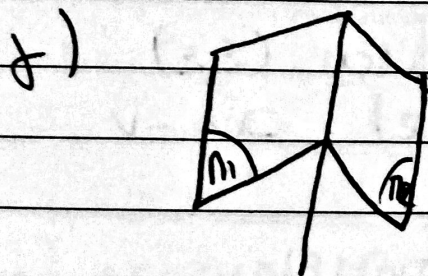
Ορισμός: Δύο επίπεδα $(\pi_1), (\pi_2)$ καλούνται παράλληλα αν - δεν έχουν κανένα κοινό σημείο (δηλ $(\pi_1) \cap (\pi_2) = \emptyset$)

$(\pi_1) \parallel (\pi_2)$



Δίνονται τα επίπεδα $(\pi_1), (\pi_2)$. Τότε ~~το~~ ένα ακριβώς από τα αυτά θα ισχύει

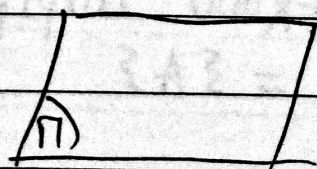
α) $(\pi_1) \equiv (\pi_2)$, β) $(\pi_1) \parallel (\pi_2)$ και γ) $(\pi_1) \cap (\pi_2) =$
ευθεία



ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

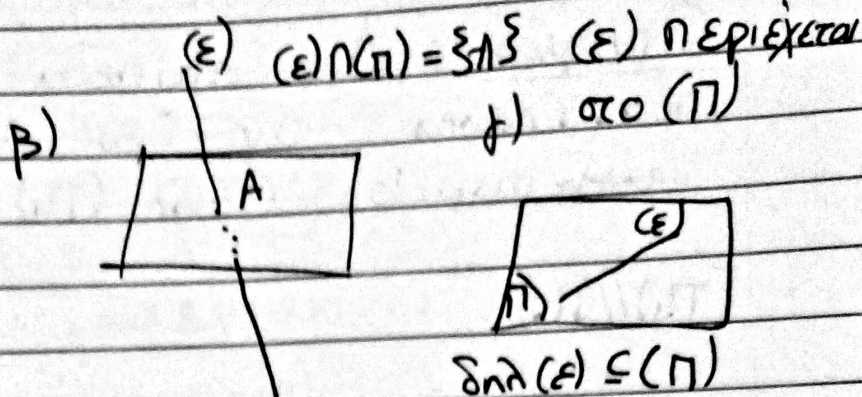
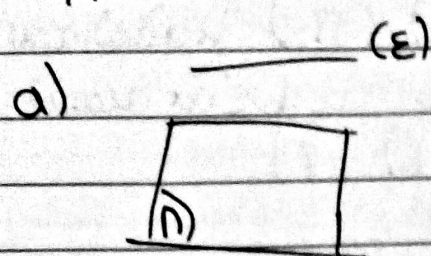
Ορισμός: Μια ευθεία (ϵ) καλείται παράλληλη προς το επίπεδο (π) αν - δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το (π) .
(δηλ $(\epsilon) \cap (\pi) = \emptyset$)

_____ ϵ



$(\epsilon) \parallel (\pi)$

- Δίνονται ευθεία (ϵ) και επίπεδο (π)
Τότε ένα ακριβώς από τα ακόλουθα
ισχύει

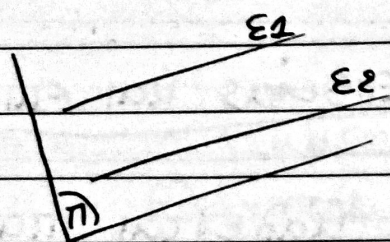


Σχετικές θέσεις ευθειών

Δίνονται δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

Ορισμός: Δύο ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) καλούνται παράλληλες $(\epsilon_1 \parallel \epsilon_2)$ αν -ν

- Είναι συνεπίπεδες
- Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

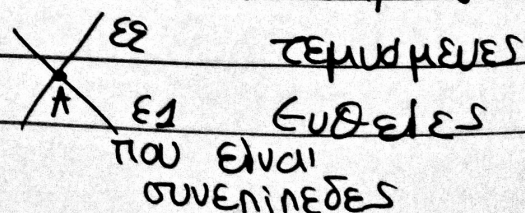


- Δίνονται ευθείες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ ποιες είναι οι σχέσεις τους θέσεις??

Ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

a) $(\epsilon_1) \equiv (\epsilon_2)$

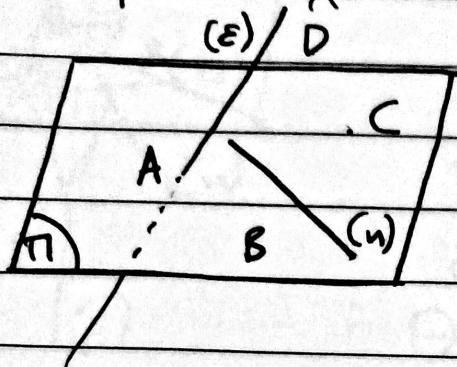
- b) οι ϵ_1, ϵ_2 έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο
 $\delta\eta\lambda \epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \{A\}$



$$\delta) (ε_1) \parallel (ε_2)$$

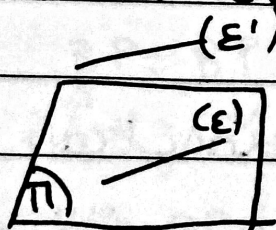
δ) Ασύμβατες ευθείες

Ορισμός: Δύο ευθείες καλούνται ασύμβατες αν-ν
 i) Δεν είναι συνεπίπεδες δηλ δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο και
 ii) να μην έχουν κανένα κοινό σημείο



Έστω A, B, C, D 4 μη συνεπίεδα σημεία και οποια ευθεία $(η)$ τ.ω $(π)$ που δε περιέχει το A είναι ασύμβατη.

Πρόταση: Η ευθεία $(ε)$ περιέχεται στο $π$
 ευθεία $ε' \parallel ε$ και $ε$ ^{πρ συνεπίπεδες και διακονούσιν}

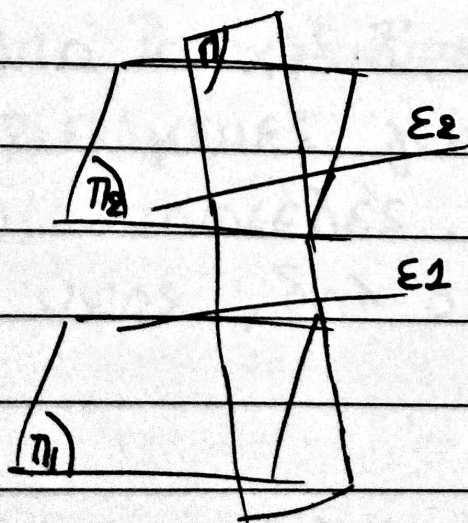


δεν περιέχεται στο $π$
 $\Rightarrow (ε') \parallel (π)$

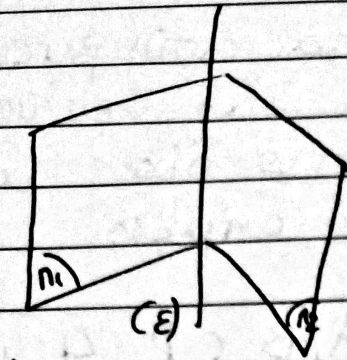
Πρόταση: Έστω $(π_1) \parallel (π_2)$

$(π)$ τέμνει τα $(π_1), (π_2)$
 σε ευθείες

$(ε_1), (ε_2)$ αντιστοιχα
 $\Rightarrow (ε_1) \parallel (ε_2)$



Πρόταση: Επίπεδα $(\pi_1), (\pi_2)$ τέμνονται
σε ευθεία (ϵ) . Ευθεία $(\epsilon') \parallel \pi_2$ και
 $(\epsilon') \parallel \pi_1$ είναι
πάντα $\parallel (\epsilon)$

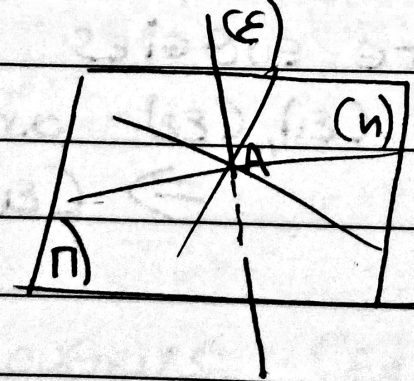


(ϵ')

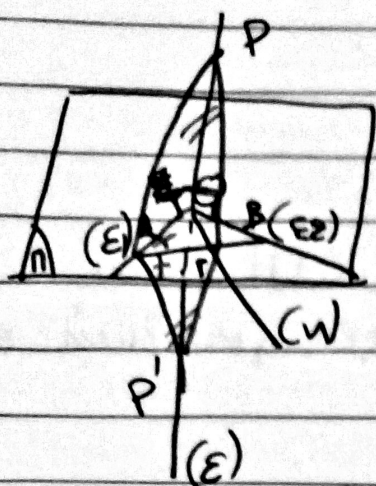
Καθετότητα ευθείας και επιπέδου

Όρισμός: Μια ευθεία (ϵ) καλείται κάθετη
σε επίπεδο (π) δηλ $(\epsilon) \perp (\pi)$ αν-ν

- i) Η (ϵ) τέμνει το (π) στο σημείο A
- ii) Η (ϵ) είναι κάθετη σε κάθε ευθεία (η)
που περιέχεται στο (π) και διέρχεται από το A.



Θεώρημα: Ευθεία (ϵ) τέμνει επίπεδο (π) στο σημείο A . Ευθείες $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ διακεκλιμένες τέμνονται στο A και περιέχονται στο (π) . Αν $\epsilon \perp (\epsilon_1)$ και $(\epsilon) \perp (\epsilon_2)$, τότε $(\epsilon) \perp (\pi)$



Απόδειξη: Έστω (η) τυχόν ευθεία του (π) διαφορετική από τις $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ που διέρχεται από το O . Θα δείξω ότι $(\epsilon) \perp (\eta)$

Θεωρώ σημεία P, P' της (ϵ)

Ευατέρωθω του O ώστε $OP = OP'$

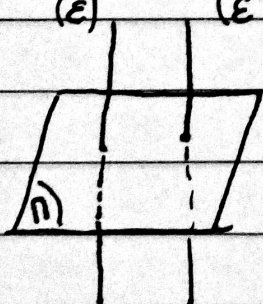
Στο $\triangle APP'$ η διάμεσος AO είναι και ύψος άρα είναι ισοσκελές. Δηλαδή $AP = AP'$ (1)

Ομοίως $BP = BP'$ (2)

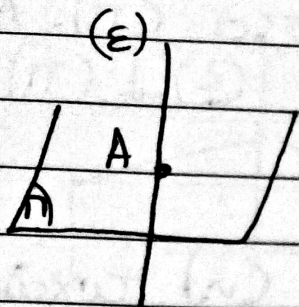
Τα $\triangle PAB, \triangle P'AB$ είναι ίσα διότι έχουν ίσες πλευρές (απέναντι από ίσες πλευρές ίσες γωνίες) Άρα $\angle PAB = \angle P'AB$

Τα τρίγωνα $\triangle PAG, \triangle P'AG$ είναι ίσα διότι έχουν δύο πλευρές ίσες ($AG = AG, PA = P'A$) και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. Άρα $PG = P'G \Rightarrow \triangle PP'G$ είναι ισοσκελές. Η GO είναι διάμεσος άρα είναι και ύψος, δηλ $GO \perp (PP')$ $\Rightarrow (\epsilon) \perp (\eta)$.

Πρόταση: i) $(\epsilon) \perp (\pi)$ και $(\epsilon') \parallel (\epsilon) \Rightarrow (\epsilon') \perp (\pi)$
 ii) $(\epsilon) \perp (\pi) \quad (\epsilon') \perp (\pi) \Rightarrow (\epsilon) \parallel (\epsilon')$



Πρόταση: Δίνεται ευθεία (ϵ) και σημείο A αυτής. Υπάρχει μοναδικό επίπεδο (π) με



τις ιδιότητες

i) $A \in (\pi)$ και

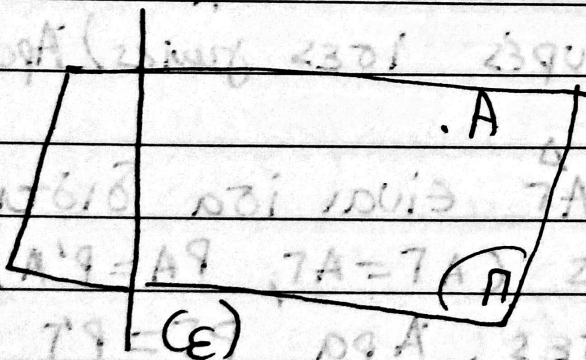
ii) $(\epsilon) \perp (\pi)$

Πρόταση: Δίνεται επίπεδο (π) και

σημείο A αυτού. Υπάρχει μοναδική ευθεία τέτοια ώστε i) $A \in (\epsilon)$ και

ii) $(\epsilon) \perp (\pi)$

Πρόταση: Δίνεται ευθεία (ϵ) και σημείο A που δεν ανήκει σε αυτήν.



Υπάρχει μοναδικό επίπεδο $(\pi) \perp (\epsilon)$ που διέρχεται από το A .